

Άλγεβρα Α λυκείου , 1^ο επαναληπτικό φυλλάδιο , κεφάλαια 1-2

Άσκηση 1^η

A1) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

A2) Να γραφεί ο ορισμός της απόλυτης τιμής

A3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

α) Αν Ω το βασικό σύνολο – δειγματοχώρος και A,B δύο υποσύνολα του . τότε ισχύει $A \cap B \subseteq A$

β) Ισχύει $1.73 \in \mathbb{Z}$

γ) Ισχύει $\chi^3 \times \chi^4 = \chi^{12}$

δ) Αν $\alpha \times \beta \neq 0$ τότε $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

ε) Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu \times \rho]{\alpha^{\mu \times \rho}}$

Άσκηση 2η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2x-1)^2 - 3x(x-1) - 1$

B1) Ν.δ.ο. $P(x) = x^2 - x$

B2) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες και στην συνέχεια , να εξετάσετε πότε ισχύει το ίσον

B3) $X^2 \geq 6X - 9$

B4) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$

Άσκηση 3^η

Έστω $\alpha = \sqrt{2} - 1$ και $\beta = \alpha - \frac{1}{\alpha}$

Γ1) Ν.δ.ο. $\beta = -2$

Γ2) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις α^2 και α^3

Γ3) Αν $4 < X < 5$ και $1 < Y < 2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $X^2 + Y^3$

Γ4) Να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{998^3 - 8}{998^2 - 4} - 998$

Άσκηση 4^η

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει $d(x, 3) < 1$

Δ1) Ν.δ.ο. $x \in (2, 4)$

Δ2) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$A = |x-2| + |x-4| \text{ και } B = \frac{|x-2|}{|x-4|}$$

Δ3) Να αποδείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 < 0$

Δ4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Gamma = |6x - 8 - x^2| + |x^2 + 9 - 6x|$

Άλγεβρα Α λυκείου , 1^ο φυλλάδιο Σ-Λ , κεφάλαια 1-2

1) Δύο σύνολα λέγονται ίσα , όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία

2) $\emptyset \subseteq A$

3) $A \subseteq A \cup B$

4) $(A')' = A$

5) $\Omega' = \emptyset$

6) Αν $\alpha\gamma = \beta\gamma$, τότε $\alpha = \beta$

7) $-7 \in \mathbb{Z}$

8) $5 \in \mathbb{R}$

9) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

10) $(\beta + \alpha) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

11) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ τότε οι α, β είναι ετερόσημοι

12) $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$

13) $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$

14) Αν $\alpha, \beta < 0$, τότε $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

15) Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} > 2$

16) $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$

17) $|- \alpha| - |\alpha| = 0$

18) Αν $\theta > 0$, τότε $|\chi| = \theta \Leftrightarrow \chi = \theta$

19) Αν $\theta > 0$, τότε $|\chi| > \theta \Leftrightarrow \chi > \theta$

20) $|\alpha + \beta| \geq |\alpha| + |\beta|$

21) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

22) Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος , τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

23) $\sqrt[n]{\alpha^n \beta^n} = \alpha \sqrt[n]{\beta^n}$, όταν $\alpha \geq 0$

$$24) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$25) \sqrt[3]{81} = 3$$

Άλγεβρα Α λυκείου , 2^ο επαναληπτικό φυλλάδιο , Κεφάλαιο 3

Άσκηση 1^η

A1) Δίνεται η εξίσωση $ax + \beta = 0$. Να γραφούν οι συνθήκες για τις παραμέτρους α, β , ώστε η εξίσωση

α) να έχει ακριβώς μια λύση

β) να είναι αδύνατη

A2) Αν η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \times x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

A3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

α) Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι ταυτότητα

β) Αν $\alpha > 0$, τότε η εξίσωση $|x| = \alpha$ έχει δύο αντίθετες λύσεις

γ) Αν ο n είναι φυσικός περιττός , τότε η εξίσωση $x^n = \alpha^n$, έχει μοναδική λύση τη $x = \alpha$

δ) Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες , τις $x_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

ϵ) Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες τουλάχιστον , τότε έχει ακριβώς δύο ρίζες

Άσκηση 2^η

B1) Να λυθεί η εξίσωση $5x^2 - 2 = 3x$.

Έστω ρ η ακέραια ρίζα της εξίσωσης

B2) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = \rho$

B3) Να λύσετε την εξίσωση $|3x - \rho| = 2|x|$

B4) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 8\rho = 0$

Άσκηση 3^η

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 3\lambda x + \lambda^2 = 0$ με παράμετρο το λ

$\Gamma 1$) Ν.δ.ο. η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης . Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει

$\Gamma 2$) $x_1^2 + x_2^2 = -6$

$$\Gamma 3) x_1 x_2 \cdot |x_1 + x_2| = 4$$

$$\Gamma 4) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$$

Άσκηση 4^η

$$\Delta 1) \text{ Να λυθεί η εξίσωση } \frac{|2x-1|}{3} - \frac{|1-2x|-11}{6} = |4x-2|$$

$$\Delta 2) \text{ Να λυθεί η εξίσωση } -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{x+6}{x^2-4} - 1$$

$\Delta 3)$ Αν ρ_1, ρ_2 οι θετικές ρίζες των παραπάνω εξισώσεων να λυθεί η εξίσωση $\lambda(x-\lambda) = \rho_2(x+2) - 5\rho_1\lambda$

Άλγεβρα Α λυκείου, 2^ο φυλλάδιο Σ-Λ, κεφάλαιο 3

1) Η εξίσωση $ax+\beta=0$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

2) Η εξίσωση $0x=-\beta$ είναι ταυτότητα για $\beta \neq 0$

3) Η εξίσωση $0x=-\beta$ είναι αδύνατη για $\beta=0$

4) Το $x=3$ είναι λύση της εξίσωσης $|x|-3=0$

5) Το $x=3$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $|x-3|=0$

6) Το -3 είναι λύση της εξίσωσης $x^{10}=3^{10}$

7) Η εξίσωση $x^{10}=3^{10}$ έχει δύο λύσεις

8) Η εξίσωση $x^3+1=0$ έχει λύση το $x=1$

9) Η εξίσωση $x^3+1=0$ έχει λύση το $x=-1$

10) Η εξίσωση $x^4+1=0$ έχει λύση

Η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$,

11) Για $\Delta=0$ έχει μια διπλή ρίζα

12) Για $\Delta>0$ έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

13) Για $\Delta<0$ έχει ρίζα

Οι τύποι Vieta είναι οι εξής

$$14) S = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$15) P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Άλγεβρα Α λυκείου, 3^ο Επαναληπτικό φυλλάδιο, κεφάλαιο 4^ο

Θέμα 1^ο

A1) Να γράψετε τις μορφές του τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma$ για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ

A2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

α) Η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$, έχει λύση $x > -\frac{\beta}{\alpha}$ για $\alpha > 0$

β) Η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ έχει 2 λύσεις για $\alpha = 0$ και $\beta < 0$

γ) Αν $\rho > 0$, τότε $|x| < \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$

Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$, τότε για τις τιμές του x

δ) που βρίσκονται εκτός των ριζών του , είναι ομόσημο του α

ε) για τις τιμές του x μεταξύ των ριζών του , είναι ετερόσημοι του α

Θέμα 2^ο

B1) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x > 1$

B2) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 1| < 3$

B3) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

Θέμα 3^ο

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ1) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες έχει πραγματικές ρίζες

Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου , να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει

Γ2) $|x_1 + x_2 - x_1 x_2| \geq 3$

Γ3) $x_1^2 + x_2^2 < 4\lambda + 22$

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3$, $\lambda \neq 0$

Δ1) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η ανίσωση $\lambda x^2 - 2\lambda x - \lambda + 3 > 0$, $\lambda \neq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω κ η ακέραιη τιμή του λ του προηγούμενου ερωτήματος

Δ2) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3|x| + 2\kappa < 0$

Δ3) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 1}$ και στην συνέχεια να λύσετε την

ανίσωση $|A| \leq \frac{1}{2}$

Άλγεβρα Α λυκείου , 3^ο φυλλάδιο Σ-Λ , Κεφάλαιο 4^ο

Έστω $\alpha x + \beta > 0$

1) Αν $\alpha > 0$, τότε $x > -\frac{\beta}{\alpha}$

2) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, τότε η ανίσωση είναι αδύνατη

3) Αν $\alpha = 0$ και $\beta < 0$, τότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό x

4) Αν $\rho > 0$, τότε $|x| > \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$

5) Αν $\rho < 0$, τότε η ανίσωση $|x| \leq \rho$, είναι αδύνατη

Έστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και Δ η διακρίνουσα του

6) Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου , τότε αυτό είναι ομόσημο του α , για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

7) Αν $\Delta = 0$ και $\alpha < 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$, για κάθε $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$

8) Αν $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9) Το τριώνυμο γίνεται ετερόσημο του α , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών

10) Το τριώνυμο μπορεί να είναι διαφορετικό του μηδενός , όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου

Άλγεβρα Α Λυκείου , 4^ο επαναληπτικό φυλλάδιο , κεφάλαιο 5^ο

Θέμα 1^ο

A1) Τι ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών ;

A2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

α) Μια ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω , αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$

β) Οι αριθμοί $x, 4x, x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $x=1$

γ) Η ακολουθία (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ , αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_{n+1} \times \lambda = \alpha_n$

δ) Οι αριθμοί $x, x+8, x-16$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x=2$

ε) Το άθροισμα των πρώτων 5 όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $a_2=2$ και $\lambda=2$ είναι $S_5=62$

Θέμα 2^ο

Έστω ότι οι αριθμοί $\alpha=3x+5$, $\beta=x-1$ και $\gamma=x+3$ με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

B1) Να βρείτε την τιμή του x

B2) Αν ο 3^{ος} όρος της προόδου είναι ίσος με α , να βρείτε τον όρο α_{11}

B3) Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της προόδου

Θέμα 3^ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) $-3,6,-12,\dots$

Γ1) Να βρεθεί ο 11^{ος} όρος της ακολουθίας

Γ2) Να βρεθεί το άθροισμα των πρώτων 10 όρων

Γ3) Να βρεθεί το πλήθος των πρώτων όρων της , που έχουν άθροισμα -129

Θέμα 4^ο

Ένα γήπεδο έχει δύο κερκίδες , την ανατολική A και την δυτική Δ με 7 σειρές καθισμάτων η κάθε μια

Στην A κερκίδα στην 1^η σειρά κάθονται 39 φίλαθλοι και σε κάθε επόμενη 5 λιγότεροι

Στην Δ κερκίδα στην 1^η σειρά κάθονται 192 φίλαθλοι και σε κάθε επόμενη σειρά ελαττώνονται με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ

Στην μεσαία σειρά και στις δύο κερκίδες οι φίλαθλοι είναι ίσοι

$\Delta 1$) Ν.δ.ο. ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στην κερκίδα Δ είναι $\lambda = \frac{1}{2}$

$\Delta 2$) Να βρείτε το πλήθος των φιλάθλων

$\Delta 3$) Αν το εισιτήριο στην 5^η σειρά στην κάθε κερκίδα είναι 10 ευρώ , να βρείτε πόσα εισέπραξε το ταμείο από την 5^η σειρά

Άλγεβρα Α Λυκείου , 4^ο φυλλάδιο Σ-Λ , κεφάλαιο 5

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n=n^2-2n$

1) Ισχύει $\alpha_1=1$

2) Ισχύει $\alpha_1=-1$

3) Ισχύει $\alpha_2=0$

4) Ισχύει $\alpha_3=0$

5) Ισχύει $\alpha_3=3$

6) Μια ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω , αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\omega$

7) Στην αριθμητική πρόοδο 15,13,11,... Ο 10^{ος} όρος είναι το 3

8) Στην αριθμητική πρόοδο 15,13,11,... Ο 10^{ος} όρος είναι το -3

9) Οι αριθμοί $x, 4x, x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $x=1$

10) Το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της 0,2,4,... Είναι 90

11) Η ακολουθία (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ , αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_{n+1} \times \lambda = \alpha_n$

12) Στην γεωμετρική πρόοδο 3,9,27,... Ο 5^{ος} όρος είναι το 243

13) Οι αριθμοί $x, x+8, x-16$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x=2$

14) Οι αριθμοί $x, x+8, x-16$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x=-2$

15) Το άθροισμα των πρώτων 5 όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $a_2=2$ και $\lambda=2$ είναι $S_5=62$

Άλγεβρα Α Λυκείου , 5^ο επαναληπτικό φυλλάδιο , κεφάλαιο 6

Θέμα 1^ο

A1) Τι λέγεται συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ;

A2) Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ;

A3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

α) Αν $x>0$ και $y<0$, τότε το σημείο M(x,y) ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο

β) Τα σημεία A(x,-y) και B(-x,y) είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων

γ) Η απόσταση των σημείων A(x₁,y₁),B(x₂,y₂) είναι $(AB)=\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

δ) Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$, τότε $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

ε) Έστω οι ευθείες $y_1=\alpha_1x+\beta_1$ και $y_2=\alpha_2x+\beta_2$. Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε οι ευθείες τέμνονται

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x^2-2x+k^3+1$ και $g(x)=2x^2+x-2$. Θεωρούμε επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

B1) Να βρείτε τις τιμές του k

B2) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g

B3) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f δεν είναι πάνω από τη C_g

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1, y = (|2\lambda - 1| - 3)x + \lambda$ και $\epsilon_2, y = 2x + 3$

Γ1) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες

Γ2) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 συμπίπτουν

Γ3) Η ευθεία ϵ_1 είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 + a|x| + 1}{2|x| - 1}$ με $f(-1) = 1$

Δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f

Δ2) Να δείξετε ότι $a = -4$

Δ3) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f

Δ4) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$

Άλγεβρα Α Λυκείου , 5^ο φυλλάδιο Σ-Λ , Κεφάλαιο 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$

1) Το πεδίο ορισμού είναι το $(1, +\infty)$

2) Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$

3) Ισχύει $f(5) = 2$

4) Ισχύει $f(9) = 3$

5) Ισχύει $f(-3) = -2$

6) Το σημείο $M(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$ ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox

7) Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο

8) Τα σημεία $A(x, -y)$ και $B(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων

9) Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ είναι $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

10) Η απόσταση των σημείων $A(x_1, \alpha), B(x_2, \alpha)$ είναι $|x_2 - x_1|$

11) Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$, τότε $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

12) Αν η ευθεία ϵ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης για την ϵ

Έστω οι ευθείες $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$

13) Αν $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες

14) Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε οι ευθείες τέμνονται

15) Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται